

**МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Министерство образования Самарской области**

**Автономная некоммерческая образовательная организация средняя**

**общеобразовательная школа «Сота»**

**АНОО СОШ "СОТА"**

**РАССМОТРЕНА**

на заседании кафедры  
ЕМН\_\_\_\_\_

Очеповский А.В.

Протокол №1  
от «21» августа 2026 г.

**ПРИНЯТО**

на заседании  
педагогического совета

Протокол №1

от «21» августа 2026 г.

**УТВЕРЖДЕНА**

Директор АНОО СОШ  
«Сота» \_\_\_\_\_ Гендель И.А.

Приказ № 42-ОД

от «21» августа 2026 г.



**СОТА**  
Школа нового  
поколения

O="АНОО СОШ ""  
СОТА """, CN=""  
Гендель Ирина  
Абрамовна, директор",  
E=sota\_school@mail.ru  
0x 00 FE BB 13 5A 73  
87 C4 F5  
2026.08.26  
15:32:04  
+04'00'

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА КУРСА ВНЕУРОЧНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ**

(ID 10176487)

**«Занимательная математика»**

для обучающихся 5-9 классов

**г.о.Тольятти, 2026**

## **Пояснительная записка**

Рабочая программа внеурочной деятельности «Олимпиадная математика» для 5–9 классов общеобразовательных организаций разработана на основе ФГОС начального общего образования и ФГОС основного общего образования, Концепции духовно-нравственного развития и воспитания личности гражданина России, Рабочей концепции одаренности [1], примерной рабочей программы внеурочной деятельности «Олимпиадная математика для 1–9 классов» 1-9 классы», разработанной в НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики» (Институт СДП) - Федеральной инновационной площадке просвещения, дидактической системы «Учусь учиться» (Л. Г. Петерсон) [3]. Программа разработана в НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики» (Институт СДП) — Федеральной инновационной площадке Министерства просвещения РФ по теме «Механизмы сохранения лидирующих позиций Российской Федерации в области качества математического образования (ИМС «Учусь учиться»))» (2021–2023 гг.).

Реализует «Концепцию выращивания способностей и одаренности» Института СДП применительно к выращиванию математических способностей и одаренности. Программа направлена на выращивание математических способностей и одаренности детей, их общеинтеллектуальное и личностное развитие, повышение качества подготовки к математическим олимпиадам и качества математического образования в целом.

## **Общая характеристика курса**

Математические олимпиады в настоящее время принято считать элитным направлением: в них вовлечено ограниченное число школьников, чаще всего из математических классов или профильных образовательных организаций. При этом мощный ресурс олимпиадной математики как эффективного инструмента интеллектуального и личностного развития детей в массовой школе используется недостаточно. Олимпиадные задачи — это, как правило, нестандартные задачи, поэтому для их решения недостаточно просто применить приобретенные на уроках знания и умения. Решение любой олимпиадной задачи — это всегда пусть маленькое, но открытие, демонстрирующее красоту математической мысли и позволяющее пережить радость творчества и удовольствие от интеллектуальной деятельности. Решение олимпиадных задач развивает у *каждого* ребенка глубину и гибкость мышления, воображение, самостоятельность и трудолюбие, творческие способности, повышает интерес к математике и уровень математической подготовки. Поэтому вовлечение в олимпиадную математику важно *для всех* учеников: математически одаренные дети в творческой среде смогут полнее реализовать свой потенциал и вырастить свой математический талант, сохраняя физическое и психическое здоровье, а все остальные — развить свои математические способности и успешнее учиться, что пригодится в любом деле. Между тем можно выделить целый ряд проблем, создающих препятствия для привлечения в олимпиадную среду учащихся массовой школы: недостаточная мотивация школьников к участию в олимпиадном движении, «оторванность» олимпиадной математики от основного школьного курса, недостаточная системность олимпиадной подготовки, отсутствие преемственности между разными уровнями образования.

**Целью** курса «Олимпиадная математика» является системная подготовка учащихся 5–9 классов к математическим олимпиадам, ориентированная на вовлечение школьников в математическую деятельность, развитие мотивации, мышления, творческих способностей и за счет этого — достижение более высокого уровня их олимпиадной и общей математической подготовки.

## **Место курса в учебном плане**

Курс «Олимпиадная математика» является курсом внеурочной деятельности, в ходе его изучения учащиеся проходят 2 этапа.

Программа I этапа (ознакомительного) предназначена для учащихся 5–6 классов и рассчитана на 68 ч (по 1 ч в неделю в 5 и 6 классах).

Программа II этапа (практического) предназначена для учащихся 7–9 классов и рассчитана на 102 ч (по 1 ч в неделю в 7, 8 и 9 классах).

## **Структура и содержание курса**

I этап — *ознакомительный* (5–6 классы)

Основной задачей данного этапа является знакомство учащихся с базовыми подходами, методами и приемами решения олимпиадных задач в соответствии с содержанием курса «Олимпиадная математика», а также формирование первичного опыта применения этих методов.

II этап— **практический** (7–9 классы)

На данном этапе увеличивается доля самостоятельности учащихся в применении метода рефлексивной самоорганизации при решении олимпиадных задач. Продолжается отработка базовых приемов и методов олимпиадной математики, но основной задачей становится теперь освоение общих подходов к решению нестандартных задач, применение их к решению более сложных, «многоходовых» задач и переход к самостоятельной разработке новых способов.

В результате прохождения учащимися этих трех этапов открывается возможность не только повысить качество олимпиадной и общей математической подготовки учащихся, но и создать в классе среду уважения к успеху и стремления к успеху, развить их познавательную мотивацию, поддержать психологическое здоровье детей и их личностный рост к наивысшим уровням развития.

**Ознакомительный этап 5–6 классы**

**Цель этапа:** создать для каждого учащегося 5–6 классов общеобразовательной школы возможность качественной олимпиадной подготовки по математике посредством вовлечения в самостоятельную математическую деятельность, развития мышления, мотивации, освоения методов и формирования системного опыта решения олимпиадных математических задач.

Задачи этапа

1) создать творческую, доброжелательную, безопасную(с позиций права на ошибку) образовательную среду, ориентированную на поддержку успеха каждого ученика относительно себя;

2) вовлечь учащихся на основе системно-деятельностного подхода (система «Учусь учиться») в математическую деятельность, создать возможность самостоятельного открытия ключевых методов и приемов решения математических олимпиадных задач, тренировать умение их применять;

3) снять у детей неуверенность и страх при решении нестандартных задач, создать возможность для каждого ученика системно переживать ситуацию успеха, радость победы, получать удовольствие от интеллектуальной математической деятельности;

4) сформировать у школьников умение решать нестандартные задачи на основе метода рефлексивной самоорганизации;

5) тренировать мыслительные операции, навыки парной и групповой работы, коммуникативные умения в позициях «автора», «понимающего», «критика», «организатора»;

6) создать качественное содержание олимпиадной подготовки по математике, связанное как с содержанием школьного курса математики (за основу взят курс математики «Учусь учиться»), так и с содержанием школьных математических олимпиад разных уровней (вплоть до Всероссийской олимпиады школьников).

Устойчивое мотивационное напряжение учащихся, необходимое для включения в любую коллективную деятельность (в том числе деятельность по решению олимпиадных задач), может проявиться только при условии удовлетворения таких базовых потребностей человека, как потребности в безопасности, причастности (теплых человеческих отношениях) и самоутверждении [3, с. 62]. Для создания среды, отвечающей этим требованиям, используются приведенные выше методологические и дидактические принципы «Олимпиадной математики», а также конкретизирующие их правила.

**Содержание ознакомительного этапа**

Содержание этапа структурировано в 21 тематическую линию, создающих базу для его развития на практическом этапе в 7–9 классах. Согласовано с содержанием непрерывного курса математики «Учусь учиться» для 5–6 классов общеобразовательной школы.

## **I. АРИФМЕТИКА**

### **1. Суммы**

Приемы упрощения устного счета (сложение, вычитание): разбиение на пары. Метод дополнения до целого в клетчатых задачах. Использование связи между числовыми и геометрическими задачами для упрощения счета.

Приемы решения задач о разделении чисел на группы с равной суммой. Составление магических квадратов. Изменение суммы при изменении каждого слагаемого на некоторое число. Метод подсчета двумя способами на примере чисел с известными попарными суммами. Прием разбиения на пары для подсчета сумм чисел, идущих через равные промежутки. Определение четности количества чисел в ряду. Формула суммы чисел от 1 до  $n$ . Разбиение на пары групп чисел с равной суммой.

Метод подсчета двумя способами в арифметических задачах. Использование подсчета двумя способами в доказательствах «от противного», при решении задач с арифметическими таблицами, геометрических задач. Введение переменной для дальнейшего двойного подсчета.

Среднее арифметическое, его свойства (изменение при увеличении всех чисел набора на некоторое число и в некоторое число раз; оценка среднего арифметического сверху и снизу наибольшим и наименьшим числами набора; неизменность среднего арифметического при добавлении числа, равного среднему арифметическому чисел набора).

## **2. Числа и их свойства**

Способы решения числовых и буквенных ребусов. Организация перебора с учетом принципа узких мест. Приемы решения задач на восстановление знаков действий, расстановку скобок, нахождение чисел с указанными свойствами.

Понятие решения буквенного ребуса. Метод перебора для поиска всех решений ребуса. Ограничение полного перебора с учетом принципа узких мест, свойств четности. Доказательство отсутствия решения у ребуса с помощью метода перебора, числовых оценок.

Конструкции с обыкновенными и десятичными дробями. Представление чисел в виде обыкновенных дробей с числителем 1 и разными знаменателями. Применение арифметических свойств дробей, правила сокращения дробей. Уменьшение чисел на интервале  $(0; 1)$  при возведении в степень.

Приемы решения задач на равномерное распределение частей между несколькими людьми.

Использование отрицательных чисел в конструкциях как метод устранения мнимых противоречий. Зависимость знака произведения от знаков множителей. Приемы решения задач на оценку и пример, связанные с отрицательными числами.

Использование отрицательных чисел в задачах с числовыми оценками.

## **3. Закономерности**

Поиск циклов в арифметических задачах. Анализ задач с повторяющимися числами, вычисление длины цикла. Определение и использование порядкового номера внутри цикла в задачах с «большими» числами.

Эффект «плюс-минус один». Использование схемы для его преодоления. Вывод формулы для определения количества натуральных чисел в промежутке с помощью интерпретации на числовой оси. Метода масштабирования для проверки формул. Использование эффекта «плюс-минус один» для устранения противоречий при решении задач.

Конструкции с предварительным анализом. Конструирование путем разбиения на аналогичные подзадачи в задачах на разрезание, составление числовых конструкций.

Последовательное конструирование (конструирование путем рассмотрения более простых задач и дальнейшего обобщения на исходную задачу). Бесконечные процессы. Понятие базовой конструкции, шага. Прием разбиения процесса на последовательность этапов, на каждом из которых изменяются свойства только одного элемента.

## **4. Время и движение**

Приемы решения арифметических задач о промежутках времени. Учет разницы часовых поясов. Идея о задачах на движение по реке на примере задач про отстающие и спешащие часы. Конструкции в задачах про время. Задачи на относительное движение (движение навстречу,

в противоположных направлениях, *вдогонку, с отставанием*) с *неполными данными. Разбор случаев в задачах на движение.*

Использование нестандартных чертежей при решении задач на движение. Изображение скоростей движения в частях (единичных отрезках). Масштабирование скорости. Использование более крупных единиц времени для уравнивания расстояний.

Недельная и годовая цикличность. День недели как остаток от деления на 7. Способы построения конструкций и доказательства невозможности построения конструкций в задачах про календарь.

Движение по кругу. Изображение скоростей движения в условных единицах (дугах). Движение стрелок часов, исследование количества их пересечений. Понятие градусной меры дуги на примере углов между часовой, минутной, секундной стрелками.

## **II. ГЕОМЕТРИЯ**

### **1. Геометрическое мышление**

Повороты клетчатой фигуры на прямой угол, связь с симметрией. Понятие о зеркальных (но несимметричных) фигурах. Использование симметрии и поворотов фигур при решении задач на разрезание. Метод «пропеллера» для построения примеров.

Задачи на разрезание пространственных фигур. Вычисление объемов фигур, составленных из кубиков. Изменение объема фигуры, составленной из кубиков, при увеличении каждого измерения в 2 раза. Составление фигур из объемных частей.

Понятие развертки. Нахождение различных разверток куба. Способы изображения «склеивающихся» граней при изображении развертки куба. Изображение фигур, состоящих из кубиков. Три вида объемной фигуры. Восстановление объемной фигуры по трем ее видам.

Изображение многогранников по заданному количеству вершин, ребер и граней (тетраэдр, пирамида, октаэдр, усеченная пирамида). Развертки многогранников. Оклеивание объемных фигур. Пути на поверхности объемных фигур.

### **2. Площади**

Разрезание фигур на равные части по линиям сетки и составление фигур из частей. Приемы поиска разных способов разрезания. Метод перебора, использование симметрии при поиске как можно большего количества различных разрезов одной и той же фигуры на равные части. Фигуры тетрамино, их нахождение с помощью метода перебора. Использование множества делителей числа для вычисления возможного количества частей, на которые можно разрезать фигуру.

Разрезания по линиям сетки и диагоналям клеток. Свойство аддитивности площади. Метод разбиения на элементарные части (прямоугольники, прямоугольные треугольники) и метод дополнения для вычисления площадей фигур, границы которых идут не по линиям сетки. Использование площадей фигур для определения форм частей в случае разрезания клетчатых фигур не по линиям сетки (диагоналям клеток).

Пентамино. Получение фигур пентамино из тетрамино с помощью геометрического метода перебора. Использование симметрии при решении задач на разрезание. Введение дополнительной сетки (укрупнение или уменьшение клеток, наклонная сетка). Первичные представления о движениях плоскости (параллельный перенос, поворот). Перпендикулярность на клетчатой бумаге. Приемы решения задач на перекраивание фигур («разрежь и составь»). Равносоставленные фигуры. Разрезание не клетчатых фигур. Введение вспомогательной сетки. Разрезание фигур на подобные. Использование вспомогательной раскраски при решении задач на разрезание. Задачи на разрезание с оценкой и примером.

### **3. Геометрические неравенства**

Конструкции с отрезками и ломаными. Вычисление периметров фигур. Связь между длинами отрезков на прямой.

Приближенное вычисление длин ломаных и кривых с помощью нити. Подсчет количества кратчайших путей в графе.

Задача о нахождении диагонали кирпича. Кратчайшие пути по граням куба, параллелепипеда.

Варианты расположения точек на прямой. Координата середины отрезка числовой прямой. Расстояние между серединами отрезков.

Неравенство треугольника. Доказательство неравенства треугольника с использованием построений. Оценка суммы длин диагоналей четырехугольника через его периметр.

### **III. АЛГЕБРА**

#### **1. От чисел к буквам**

Метод уравнивания при решении задач с опорой на вспомогательные схемы. Метод «анализ с конца».

Прием «учти лишнее». Метод подсчета двумя способами.

Связь с теорией множеств.

Выбор удобной переменной в текстовых задачах. Сравнение метода введения переменных с методом доказательства единственности решения задачи с помощью числовых оценок.

Десятичная запись (представление натурального числа в виде  $a + 10b + 100c + \dots$ ). Признаки делимости, связанные с десятичной записью числа. Использование десятичной записи при решении буквенных ребусов и для доказательств «от противного». Сведение задачи к простейшим уравнениям в цифрах с дальнейшим перебором вариантов, использованием свойств делимости.

#### **2. Функциональные зависимости**

Использование формул при решении нестандартных текстовых задач. Формулы площади прямоугольника, объема и площади поверхности куба, прямоугольного параллелепипеда.

Доказательство формул перевода единиц измерения площади, объема. Нестандартные единицы измерения.

Понятие взаимно однозначного соответствия между множествами. Разбиение объектов на пары как пример взаимно однозначного соответствия. Использование взаимно однозначного соответствия для сравнения мощностей множеств. Примеры соответствий, не являющихся взаимно однозначными. Взаимно однозначное соответствие в простых комбинаторных задачах.

Прямая и обратная пропорциональность. Использование пропорций при решении нестандартных текстовых задач.

Свойство суммы и среднего арифметического пропорционально изменяемых чисел.

#### **3. Неравенства и оценки**

Сравнение многозначных чисел. Нахождение наибольшего или наименьшего многозначного числа с определенными свойствами. Использование правил сравнения чисел для доказательства минимальности и максимальности.

Метод перебора в арифметических задачах. Перебор по количеству объектов одного из двух типов. Задачи про «ноги и головы». Оценки, основанные на изменении количества объектов одного типа на единицу. Четность как инструмент упрощения перебора и доказательства невозможности.

Оценки величины «сверху» и «снизу». Ограничение перебора с помощью оценок. Двусторонние оценки как метод доказательства единственности ответа. Простейшие действия с неравенствами.

Оценки, связанные с делимостью. Решение двойных неравенств с натуральными числами.

Транзитивность неравенств. Использование промежуточного числа (посредника) для доказательства числовых неравенств. Использование нескольких посредников. Уменьшение чисел на интервале  $(0; 1)$  при возведении в степень.

### **IV. ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ**

#### **1. Делимость**

Вывод признака делимости на 2 с помощью числового луча и закидывания последней цифры. Изменение последней цифры числа при сложении, вычитании, умножении. Доказательство четности и нечетности суммы и разности двух чисел. Четность или нечетность суммы нескольких чисел. Доказательство с помощью разбиения на пары. Использование соображений четности при решении задач на доказательство для упрощения перебора вариантов.

Делимость и ее свойства. Доказательство признаков делимости на 2, 4, 8, 5, 25, 10, 3, 9, их обобщение. Отсутствие обобщения признака делимости на 9 на признак делимости на 27.

Разложение натурального числа на простые множители. НОД и НОК. Простые числа. Делимость как инвариант.

Другие признаки делимости, связанные с десятичной записью числа (на 7, 11, 13 и др.).

Задачи на оценку и пример, связанные с признаками делимости: нахождение минимального числа с указанными свойствами делимости, числа с наименьшей суммой цифр.

Каноническое разложение натурального числа. Степень вхождения простого делителя. Четность степеней вхождения простых множителей в каноническое разложение точного квадрата.

## **2. Остатки**

Признак делимости на 10. Последняя цифра как остаток от деления на 10. Правила изменения последней цифры при арифметических операциях (сложение, вычитание, умножение).

Повторяемость на числовом луче чисел, делящихся на  $n$ . Повторяемость чисел, дающих определенный остаток при делении на  $n$ . Способ определения остатка числа, связанный с соответствующим признаком делимости. Делимость на  $n$  разности числа и его остатка от деления на  $n$ . Сумма цифр. Делимость разности числа и его суммы цифр на 3 и 9. Раскладывание числа на разное количество частей с данным остатком.

Остатки от деления целых чисел на натуральные. Общий вид числа с определенным остатком при делении на число. Арифметические свойства остатков. Задачи на остатки с доказательством по принципу Дирихле. Заключивание остатков степеней.

## **V. ЛОГИКА**

### **1. Математическая логика**

Понятие об истинном и ложном высказывании. Составление высказываний и вопросов с определенными свойствами. Перебор двух вариантов в логических задачах. Рыцари и лжецы. Отрицания элементарных высказываний. Перебор вариантов по роли (рыцарь/лжец). Представление перебора в виде таблицы, дерева вариантов. Высказывания о логическом следовании.

Логические задачи с неединственным ответом. Перебор использующий высказывания о существовании и всеобщности. Отрицание высказываний о существовании и всеобщности. Отрицание высказываний с «больше», «меньше», «больше или равно», «меньше или равно».

Метод «от противного». Логические таблицы. Отрицание высказываний с «и», «или», более сложных высказываний.

Логические задачи на оценку и пример. Доказательства, использующие чередование объектов. Расположение объектов по кругу.

### **2. Принципы решения задач**

Представление условия задачи в виде нестандартного чертежа. Геометрические интерпретации логических и арифметических задач.

Малые случаи. Разделение задачи на эквивалентные под задачи. Составление блоков из элементов разбиения. Задачи с повторяющимися объектами. Метод проверки ответа (закономерности) на малых случаях.

Анализ задачи с конца (обратный ход) в арифметических и логических задачах. Сравнение с методом введения переменной. Табличное представление анализа с конца. Рассмотрение последнего шага процесса, его использование для доказательств в логических задачах.

Задачи с вопросом «сколько нужно взять?». Использование отрицаний элементарных высказываний при решении задач.

Формальное введение принципа Дирихле. Связь с доказательством «от противного». Обобщения принципа Дирихле. Принцип Дирихле в геометрических задачах. Остатки и принцип Дирихле.

### **3. Алгоритмы и конструкции**

Переливания (задачи на отмеривание определенного количества жидкости с помощью двух или более емкостей и источника воды). Табличная форма записи шагов алгоритма.

Укрупнение шагов алгоритма при наличии повторяющихся групп действий (идея алгоритмических циклов).

Переправы. Организация перебора в задачах на переправы, удобная форма записи решения. Идея промежуточных обратных действий для работы алгоритма (перевоз объекта обратно).

Составление алгоритмов угадывания с помощью вопросов, на которые можно ответить только «да» или «нет». Доказательство несостоятельности алгоритма, позволяющего при одинаковых начальных данных получить различные ответы.

Взвешивания. Составление алгоритмов определения фальшивых монет с помощью взвешиваний. Прямая и косвенная информация. Понятие о количестве информации. Доказательство невозможности построения алгоритма при недостаточном количестве взвешиваний. Задачи на испытания с другими сюжетами.

#### **4. Игры и стратегии**

Понятие математической игры для двух игроков на примере игр с шахматными фигурами на досках. Игры-шутки, в которых победитель зависит только от количества раундов.

Формирование представления о выигрышных позициях. Понятие выигрышной стратегии. Математические игры с полной информацией. Использование дерева перебора для доказательства верного выбора стратегии.

Симметричная стратегия в играх. Доказательство симметричной стратегии. Симметричная стратегия с «центром». Примеры неверного использования симметричной стратегии.

Выигрышные позиции как метод конструирования стратегии. Игры на опережение. Игры, в которых один игрок может гарантировать себе «ничью».

### **VI. КОМБИНАТОРИКА И ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ**

#### **1. Комбинаторика**

Использование схем (графов) для удобства подсчета количества связей (дорог, рукопожатий). Доказательства невозможности построения графа с определенным количеством связей. Подсчет общего количества игр в однокруговом турнире. Связь между прямым подсчетом числа связей по схеме и двойным подсчетом через суммарное количество выходящих «связей».

Дерево вариантов для решения комбинаторных задач.

Переход от дерева вариантов к правилу произведения (правилу «И»). Подсчет количества чисел с определенными свойствами.

Правило суммы (правило «ИЛИ») и правило произведения (правило «И»), определение ситуаций для использования каждого правила. Задачи, требующие использования комбинации этих правил.

Перестановки без повторений и с повторениями на примере анаграмм слова. Вывод формулы для числа перестановок из правила произведения. Факториал и его свойства. Перестановки с повторениями. Вывод формулы.

#### **2. Теория множеств**

Диаграмма Эйлера — Венна для двух, трех и более множеств. Пересечение и объединение множеств, различные методы подсчета количества элементов в пересечении и объединении на готовых диаграммах.

Введение вспомогательной диаграммы для решения задачи. Работа с множествами с неизвестным количеством элементов. Логические задачи на множества, связанные с долями и дробями.

Метод дополнения в задачах. Использование кругов Эйлера и метода дополнения в комбинаторных задачах, в том числе для вычисления количества чисел в диапазоне, делящихся или не делящихся на какие-то числа.

Метод введения переменной при решении задач про множества.

### **VII. КОМБИНАТОРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ**

#### **1. Раскраски и разбиения**

Раскраски досок. Конструирование примера раскраски доски с указанными свойствами. Задачи-соревнования на раскраску досок в наибольшее и наименьшее количество цветов.

«Правильная» раскраска. Раскраска географической карты как пример «правильной» раскраски.

Чередование объектов как частный случай «шахматной» раскраски. Чередование объектов в ряду, по кругу. Относительное количество чередующихся объектов. Четность суммы чисел в промежутке. Связь чередования и разбиения на пары.

Разрезания шахматной доски. Идея использования заданной шахматной раскраски в доказательствах.

Шахматная раскраска досок, ее использование для оценок и доказательств. Обобщение шахматной раскраски на другие объекты. Шахматная раскраска ребер и граней куба.

Принцип Дирихле в задачах с раскраской. Использование раскраски для нахождения и доказательства единственности примера.

Виды раскрасок клетчатых досок в два и более цвета. Раскраска полосами, диагональная раскраска в несколько цветов, «крупная» шахматная раскраска. Доказательство невозможности разрезания на основе раскраски.

## **2. Теория графов**

Изображение графов. Граф как способ удобного представления связей между объектами. Изоморфизм графов. Различные способы изображения связей. Неориентированные и ориентированные связи.

Исследование возможности нарисовать фигуру одним росчерком. Теорема Эйлера как формальный способ проверить, можно ли нарисовать фигуру одним росчерком. Нечетность степеней вершин как способ выявления концов пути.

Полный граф. Количество ребер в полном графе. Графы шахматных фигур и количество ребер в них. Двудольный граф как модель связей между объектами двух типов. Представление турнира в виде графа.

Формальное определение графа. Вершины, ребра, степени вершин. Лемма о рукопожатиях как способ подсчета количества ребер в графе через сумму степеней вершин. Свойство четности количества вершин нечетной степени в графе. Лемма о хороводах.

## **3. Комбинаторная геометрия**

Взаимное расположение точек и отрезков на плоскости.

Точки и отрезки, лежащие на одной прямой. Идея об увеличении количества частей при разрезании невыпуклых фигур.

Разрезание фигур на части с определенным числом сторон. Разрезание на части, не образующие прямоугольники.

Задачи на объединение фигур. Покрытие плоскости одинаковыми фигурами (паркеты). Понятие о многоугольнике. Паркеты в форме правильных многоугольников (треугольники, квадраты, шестиугольники). Замощение клетчатыми фигурами. Замощение многоугольниками неправильной формы. Замощение невыпуклыми многоугольниками. Задачи о наиболее плотной укладке.

Невыпуклые фигуры как средство преодоления мнимых противоречий. Задачи о пересечении фигур.

### **Практический этап. 7–9 классы**

#### **Содержание этапа**

Содержание практического этапа курса «Олимпиадная математика» по каждой из 21 тематических линий преемственно продолжает содержание ознакомительного этапа. Согласовано с содержанием непрерывного курса математики «Учусь учиться» для 7–9 классов общеобразовательной школы.

#### **I. АРИФМЕТИКА**

##### **1. Суммы**

Телескопическое суммирование. Суммы с переменными пределами. Использование формул сокращенного умножения (разность квадратов, кубов), разложения многочленов на множители при вычислении сумм.

Последовательности. Числа Фибоначчи как пример рекуррентного соотношения. Свойства чисел Фибоначчи, связанные с суммированием. Примеры задач, при решении которых возникает последовательность Фибоначчи.

Применение арифметической, геометрической прогрессий и их свойств при решении задач. Понятие о рекуррентных соотношениях.

##### **2. Числа и их свойства**

Определение рационального числа. Доказательство рациональности периодических дробей. Конструкции с рациональными числами.

Определение иррационального числа. Доказательство иррациональности чисел на примере числа  $\sqrt{2}$ . Сопряженные иррациональные числа. Умножение выражения на сопряженное. Рациональность и иррациональность суммы, разности, произведения и частного иррациональных чисел. Иррациональность бесконечных непериодических десятичных дробей.

Приложения иррациональных чисел. Иррациональность в алгебраических задачах. Связь между диагональю и стороной квадрата. Невозможность построения правильного треугольника с вершинами в узлах сетки. Применение идей о рациональности и иррациональности в геометрических задачах.

### **3. Закономерности**

Обобщение числовой задачи на задачу с переменным количеством элементов. Формулы числовых закономерностей.

Введение формул закономерностей при подсчете количества объектов в арифметических, геометрических, логических и комбинаторных задачах.

Метод математической индукции. Формальное введение метода. База, шаг индукции. Доказательство алгебраических равенств (формул закономерностей) с помощью метода математической индукции. Задачи с шагом, отличным от 1.

Более сложные схемы математической индукции. Индукция со ссылкой на несколько предыдущих элементов. Возвратная схема математической индукции, примеры неправильного применения метода математической индукции. Использование метода математической индукции при решении геометрических, комбинаторных, комбинаторно-геометрических, теоретико-числовых задач.

### **4. Время и движение**

Относительное движение. Переход в систему координат, связанную с одним из объектов, движущимся по прямой или по окружности. Движение мимо протяженных объектов. Движение по реке. Задачи о двигающемся эскалаторе.

Задачи на движение с несколькими переменными. Применение неравенства Коши о среднем арифметическом и среднем геометрическом для двух чисел, неравенства Штурма в задачах на движение.

Сведение текстовых задач (на движение, совместную работу и т. д.) к линейным и нелинейным системам с несколькими переменными.

## **II. ГЕОМЕТРИЯ**

### **1. Геометрическое мышление**

Задачи на построение. Решение нестандартных задач на построение, нахождение ГМТ. Использование симметрии в задачах на построение. Построение кратчайших путей. Биссектрисы, серединные перпендикуляры как ГМТ.

Решение задач, использующих дополнительные построения: удвоение медианы, откладывание равного отрезка на продолжении стороны («спрямление»), построение середины отрезка, проведение высот, вспомогательной окружности.

Движения плоскости и их использование при решении геометрических задач. Центральная, осевая и скользящая симметрия. Поворот. Параллельный перенос. Гомотетия, поворотная гомотетия.

### **2. Площади**

Формула площади треугольника. Вывод формулы площади произвольного треугольника с вершинами в узлах сетки.

Вывод формулы площади произвольного треугольника с помощью метода дополнения. Вычисление площадей фигур с помощью разрезов на элементарные части (прямоугольники и треугольники).

Метод трансформации площадей, основанный на формуле площади треугольника.

Формула Пика для вычисления площадей многоугольников с вершинами в узлах сетки. Ее доказательство методом математической индукции и применение в задачах.

### **3. Геометрические неравенства**

Неравенство треугольника и дополнительные построения. Использование дополнительных построений при доказательстве геометрических неравенств. Задача о нахождении кратчайшего пути между двумя точками, находящимися по одну сторону от заданной прямой, касающегося этой прямой.

Более сложные задачи о кратчайших путях, использующие симметрию и неравенство треугольника. Неравенство ломаной как обобщение неравенства треугольника.

Теорема о монотонности периметра: если внутри одного треугольника находится другой, то периметр внутреннего треугольника меньше периметра внешнего.

Случаи в геометрических задачах. Доказательство правильности дополнительного построения.

### **4\*. Аналитические методы в геометрии**

Теорема Пифагора. Доказательства теоремы, основанные на свойствах площадей фигур. Применение теоремы Пифагора при решении задач на разрезание. Декартовы координаты на плоскости. Метод координат для решения геометрических задач. Векторы, их свойства. Использование векторов в геометрических доказательствах. Теоремы синусов и косинусов. Их применение в геометрических доказательствах.

## **III. АЛГЕБРА**

### **1. От чисел к буквам**

Алгебраические преобразования. Понятие об одночлене, многочлене. Разложение многочленов на множители. Формулы сокращенного умножения и их применение при решении задач.

Многочлены с целыми коэффициентами, их свойства. Свойства коэффициентов многочлена. Теорема Виета для квадратного трехчлена. Квадратный трехчлен, его свойства. Доказательство теоремы Безу для многочленов, ее использование при решении задач. Понятие асимптотики на примере зависимости поведения многочлена от знака его старшего коэффициента. Теорема Виета.

### **2. Функциональные зависимости**

Линейная функция. Свободный член и угловой коэффициент, их геометрический смысл. График линейной функции.

Точки с целочисленными координатами на прямой. Использование свойств линейной функции при решении нестандартных задач.

Квадратичная функция. Геометрический смысл коэффициентов. График квадратичной функции.

Использование свойств непрерывности графиков функций для решения задач. Распознавание функций по их свойствам и значениям. Интерполяционные многочлены.

### **3. Неравенства и оценки**

Доказательство неравенств. Неотрицательность квадрата числа. Выделение полных квадратов. Неравенство о средних арифметическом и геометрическом для двух чисел. Неравенство о сумме квадратов трех чисел и их попарных произведениях.

Сведение неравенств к уже известным. Неравенства о средних для двух чисел.

Транснеравенство, неравенство Чебышева. Симметрические и циклические неравенства.

Неравенство Коши — Буняковского — Шварца. Способы его доказательства. Лемма Титу.

Общий случай неравенства о средних. Метод Штурма доказательства неравенств. Доказательство классических неравенств с помощью метода Штурма.

## **IV. ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ**

### **1. Делимость**

Алгоритм Евклида. Свойства НОД и НОК. Теорема о линейном представлении НОД, ее использование для нахождения частного решения линейных диофантовых уравнений.

Нелинейные уравнения в целых, неотрицательных, натуральных числах. Использование степеней вхождения простых чисел. Метод бесконечного спуска. Использование сравнений по модулю. Применение разложения на множители, выделения полного квадрата, других ФСУ.

Мультипликативные функции. Функция Эйлера, простейшие примеры вычисления функции. Связь с МТФ. Теорема Эйлера.

## **2. Остатки**

Перебор по остаткам. Остатки квадратов при делении на 3, 4, 5, 7, 8, 9.

Сравнения по модулю. Свойства сравнений. Вопрос о делении сравнений. Сравнения как удобный метод записи перебора по остаткам.

Решение сравнений через сведение к линейным диофантовым уравнениям. Решение линейных диофантовых уравнений.

Малая теорема Ферма. Доказательство через остатки произведений при делении на  $p$ . Доказательство по индукции.

Теорема Вильсона. Применение МТФ и теоремы Вильсона в задачах теории чисел.

Теория чисел на окружности. Первообразный корень. Порядок (показатель) числа по модулю, его свойства. Классы вычетов. Доказательство МТФ через показатели. Доказательство МТФ через системы вычетов.

## **V. ЛОГИКА**

### **1. Математическая логика**

Приемы решения логических задач на оценку и пример. Доказательства, использующие раскраску объектов и разбиение на группы. Отрицание логического следования.

Использование принципа крайнего при решении логических задач. Логические формулы, их использование для построения отрицаний. Законы де Моргана. Таблицы истинности. Графы в логических задачах. Примеры комбинированных логических задач, связанных с другими областями математики.

### **2. Принципы решения задач**

Принцип узких мест как инструмент конструирования примеров, доказательства утверждений (в том числе в комбинации с другими методами, такими как метод «от противного»). Рассмотрение наибольшего или наименьшего числа в ряду, упорядочивание. Геометрический принцип крайнего.

Процессы. Инвариант как метод доказательства утверждений, выяснения результата процесса. Инварианты, связанные с теорией чисел (делимость, остатки). Инварианты в геометрических задачах. Раскраска как инвариант.

Полуинвариант, сравнение с инвариантом. Нахождение полуинварианта как метод доказательства конечности процесса. Сумма и произведение чисел как полуинвариант. Полуинварианты в комбинаторной геометрии, теории графов, геометрических задачах.

### **3. Алгоритмы и конструкции**

Понятие о «жадном» алгоритме. «Жадный» алгоритм как метод построения примера, доказательства минимальности или максимальности. Использование «жадного» алгоритма при постепенном конструировании. Отклонение от «жадности».

Составление алгоритмов, работающих вне зависимости от промежуточных результатов работы алгоритма. Связь с системами счисления. Примеры таких алгоритмов в задачах на взвешивания, угадывание, в задачах на клетчатых досках.

Обобщение методов доказательства невозможности построения алгоритма при определенных условиях. Оценка сложности алгоритмов.

### **4. Игры и стратегии**

Стратегия предварительного разбиения ходов на пары в математических играх для двух игроков, связь с темой «Соответствия». Разбиение на пары во время игры. Стратегии создания «заповедников».

Неконструктивное доказательство существования стратегии.

Игры на графах. Использование двоичной системы счисления в теории игр. Игра Ним.

## **VI. КОМБИНАТОРИКА**

### **1. Комбинаторика**

Размещения с повторениями и их использование при решении задач. Размещения без повторений. Вывод формулы и ее запись в виде отношения факториалов.

Число сочетаний и его связь с числом размещений. Вывод формулы. Комбинаторное и алгебраическое доказательства равенств для числа сочетаний.

Свойства чисел сочетаний. Вывод формулы шаров и перегородок. Взаимно однозначные соответствия в комбинаторике. Идея кодирования задач. Комбинаторные задачи с множествами.

Бином Ньютона, треугольник Паскаля, связь между ними. Их применение при решении задач.

## **2. Теория множеств**

Формула включений-исключений для трех множеств.

Обобщение формулы включений-исключений на несколько множеств. Комбинаторное доказательство. Применение формулы включений-исключений при решении задач комбинаторной геометрии.

Индукционное доказательство формулы включений-исключений. Использование изоморфизма множеств для упрощения подсчета числа вариантов.

## **VII. КОМБИНАТОРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ**

### **1. Раскраски и разбиения**

Разбиение на группы объектов двух типов, расположенных по кругу. Разбиение досок на части для доказательства оценок. Подсчет общего количества разбиений.

Определение правильных вершинной и реберной раскрасок. Двудольный граф как пример графа, раскрашиваемого в два цвета.

Хроматическое число графа. Планарные (плоские) графы, их связь с картами. Проблема четырех красок. Формула Эйлера для связного плоского графа.

### **2. Теория графов**

Связность графа, компоненты связности. Циклы в графах. Дерево, его определения и свойства. Зависимость минимального количества ребер в графе от числа компонент связности.

Двудольные графы. Критерий двудольности.

Выделение остовного дерева. Подвешивание графа. Дополнительный граф. Использование графов в теории чисел, комбинаторной геометрии.

Ориентированные графы, их свойства и область применения.

Критерий существования эйлерава пути, эйлерава цикла в графе. Разбиение произвольного графа в объединение простых путей и непересекающихся циклов. Гамильтонов путь, гамильтонов цикл в графе. Существование гамильтонова пути в полном ориентированном графе. Примеры графов без гамильтоновых циклов.

### **3. Комбинаторная геометрия**

Раскраски плоскости с определенными свойствами. Задачи о нахождении одноцветных и разноцветных точек на определенном расстоянии. Раскраски паркетов. Раскраска объемных фигур.

Определение выпуклого множества. Различные определения выпуклых многоугольников, их эквивалентность. Понятие о триангуляции. Лемма о диагонали. Триангуляция произвольного многоугольника. Доказательство формул суммы градусных мер внутренних и внешних углов многоугольника.

Связь триангуляций с деревьями. Лемма о наличии в триангуляции двух треугольников с двумя сторонами, совпадающими со сторонами многоугольника.

Опорная прямая многоугольника. Выпуклая оболочка системы точек. Построение выпуклой оболочки. Использование при решении задач и доказательстве утверждений.

## **ПЛАНИРУЕМЫЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ**

### **Личностные результаты:**

формирование ответственного отношения к учению, готовности и способности обучающихся к саморазвитию и самообразованию на основе мотивации к обучению и познанию;

формирование коммуникативной компетентности в общении и сотрудничестве с взрослыми и сверстниками в процессе образовательной, учебно-исследовательской, творческой и других видов деятельности.

### **Метапредметные результаты:**

#### **Регулятивные универсальные учебные действия**

Обучающийся научится:

целеполаганию, включая постановку новых целей, преобразование практической задачи в познавательную;

самостоятельно анализировать условия достижения цели на основе учета выделенных учителем ориентиров действия в новом материале;

планированию путей достижения целей;

умению самостоятельно контролировать своё время и управлять им;

адекватно самостоятельно оценивать правильность выполнения действия и вносить необходимые коррективы в исполнение, как в конце действия, так и по ходу его реализации.

#### **Коммуникативные универсальные учебные действия**

Обучающийся научится:

учитывать разные мнения и стремиться к координации различных позиций в сотрудничестве;

формулировать собственное мнение и позицию, аргументировать и координировать её с позициями партнеров в сотрудничестве при выработке общего решения в совместной деятельности;

устанавливать и сравнивать разные точки зрения, прежде чем принимать решения и делать выбор;

задавать вопросы, необходимые для организации собственной деятельности и сотрудничества с партнером;

осуществлять взаимный контроль и оказывать в сотрудничестве необходимую взаимопомощь.

#### **Познавательные универсальные учебные действия**

Обучающийся научится:

осуществлять поиск необходимой информации для выполнения учебных заданий с использованием учебной литературы;

создавать и преобразовывать модели и схемы для решения задач;

осуществлять выбор наиболее эффективных способов решения задач в зависимости от конкретных условий;

устанавливать причинно-следственные связи;

осуществлять анализ, сравнение, сериацию и классификацию, самостоятельно выбирая основания и критерии для указанных логических операций;

строить логическое рассуждение, включающее установление причинно-следственных связей;

### **Воспитательные результаты:**

#### **Результаты первого уровня (приобретение социальных знаний, понимания социальной реальности и повседневной жизни):**

приобретение школьниками знаний о принятых в обществе нормах поведения и общения;

об интеллектуальной деятельности, о способах и средствах выполнения заданий;

о правилах конструктивной групповой работы;

о способах самостоятельного поиска, нахождения, обработки информации;

формирование мотивации к учению через внеурочную деятельность.

## **Результаты второго уровня (получение опыта переживания и позитивного отношения к базовым ценностям общества):**

самостоятельное или во взаимодействии с педагогом, значимым взрослым выполнение задания данного типа, для данного возраста;

умение высказывать мнение, обобщать, классифицировать, обсуждать.

## **Результаты третьего уровня (получение опыта самостоятельного общественного действия):**

умение самостоятельно применять изученные способы, аргументировать свою позицию, оценивать ситуацию и полученный результат;

участие в олимпиадах и интеллектуальных конкурсах.

### **5 класс**

К концу обучения в пятом классе обучающийся научится:

#### **I. АРИФМЕТИКА**

##### **1. Суммы**

вычислять суммы чисел, идущих через равные промежутки, с помощью разбиения на пары;

применять формулу суммы всех натуральных чисел от 1 до  $n$ ;

использовать подсчет суммы чисел в задачах о разбиении на пары групп чисел с равной суммой.

##### **2. Числа и их свойства**

конструировать примеры с дробями;

применять арифметические свойства дробей, правила сокращения дробей в задачах-конструктивах;

решать задачи о равномерном распределении частей между несколькими людьми.

##### **3. Закономерности**

проводить предварительный анализ в задачах-конструктивах;

использовать разбиение на подзадачи при построении геометрических и числовых конструкций.

##### **4. Время и движение**

строить и применять нестандартные схемы (чертежи) к задачам на движение;

изображать скорости движения в частях (единичных отрезках);

использовать более крупные единицы времени, НОД и НОК для уравнивания расстояний.

#### **II. ГЕОМЕТРИЯ**

##### **Геометрическое мышление**

изображать развертки простых пространственных фигур (куб, параллелепипед, пирамида);

подбирать подходящие разные развертки куба и прямоугольного параллелепипеда для решения задач;

изображать три вида объемной фигуры;

восстанавливать возможную форму пространственной фигуры по ее трем видам.

##### **Площади**

применять метод перебора в геометрических задачах, соображения симметрии для его упрощения;

использовать фигуры пентамино при решении задач на разрезание;

вводить вспомогательную сетку (с укрупненными или уменьшенными клетками, наклонную сетку) для вычисления площадей фигур на клетчатой бумаге;

применять параллельный перенос на клетчатой бумаге для упрощения вычисления площадей фигур;

проводить предварительный анализ в задачах о перекраивании фигур;

находить возможные способы разрезания и составления фигур в задачах о перекраивании фигур с помощью метода «проб и ошибок», принципа «узких мест».

##### **Геометрические неравенства**

рассматривать все неэквивалентные варианты взаимного расположения нескольких точек на прямой;

•• вычислять координату середины отрезка на числовой прямой;

•• находить расстояние между серединами отрезков на числовой прямой по координатам вершин этих отрезков.

#### **III. АЛГЕБРА**

##### **От чисел к буквам**

вводить удобную переменную в нестандартных текстовых задачах;

составлять и решать уравнение с одной переменной.

##### **Функциональные зависимости**

устанавливать взаимно однозначное соответствие между элементами двух множеств;  
использовать взаимно однозначное соответствие (разбиение на пары) для сравнения количества элементов в двух множествах;  
применять метод разбиения на пары при решении комбинаторных задач.

### **Неравенства и оценки**

доказывать оценки значения величины «сверху» и «снизу»;  
использовать оценки «сверху» и «снизу» для ограничения перебора числовых значений величины;  
применять двусторонние оценки для доказательства единственности возможного значения неизвестной.

## **IV. ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ**

### **Делимость**

применять свойства делимости, признаки делимости на 2, 4, 8, 5, 25, 10, 3, 9 при решении нестандартных задач;  
доказывать обобщения признаков делимости (признаки делимости на степени двойки, степени пятёрки);  
использовать разложение натурального числа на простые множители в задачах-конструктивах и задачах на доказательство;  
фиксировать и применять инвариантность свойства делимости некоторой величины в процессах.

### **Остатки**

определять остаток от деления числа на 2, 4, 8, 5, 10, 3, 9 с помощью соответствующего признака делимости;  
использовать свойство делимости на  $n$  разности числа и его остатка от деления на  $n$  при решении задач.

## **V. ЛОГИКА**

### **Математическая логика**

находить с помощью метода перебора все варианты ответа в логических задачах;  
анализировать высказывания о существовании и всеобщности, использовать их отрицания при решении логических задач;  
строить отрицания высказываний со связками «больше», «меньше», «больше или равно», «меньше или равно».

### **Принципы решения задач**

применять метод «анализ с конца» (метод обратного хода) при решении текстовых и логических задач;  
использовать табличную форму записи решения текстовой задачи с помощью «анализа с конца»;  
использовать идею доказательства «от противного» при решении задач о наибольшем или наименьшем возможном значении величины (задачи с вопросом «сколько нужно взять»).

### **Алгоритмы и конструкции**

составлять алгоритмы угадывания с помощью вопросов, на которые можно отвечать только «да» и «нет»;  
использовать табличную форму записи шагов алгоритма угадывания.

### **Игры и стратегии**

строить и обосновывать симметричную стратегию, симметричную стратегию «с центром» в математических играх для двух игроков;  
приводить примеры неверного использования симметричной стратегии;  
конструировать выигрышную стратегию на основе анализа выигрышных и проигрышных позиций в игре.

## **VI. КОМБИНАТОРИКА И ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ**

### **Комбинаторика**

применять правила суммы (правило «ИЛИ») и произведения (правило «И») в комбинаторных задачах;  
решать задачи, требующие комбинации этих двух правил.

### **Теория множеств**

применять метод дополнения, теоретико-множественные модели для решения задач о подсчетах;  
вычислять количество натуральных чисел в диапазоне, делящихся или не делящихся на некоторое  $n$ .

## **VII. КОМБИНАТОРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ**

### **Раскраски и разбиения**

использовать шахматную раскраску доски, других объектов для проведения оценок и доказательств;  
использовать шахматную раскраску для конструирования примеров.

### **Теория графов**

строить более сложные интерпретации задач в терминах теории графов (графы шахматных фигур);  
вычислять количество ребер в полном графе, графе шахматной фигуры;  
представлять турнир в виде графа;  
изображать двудольный граф.

### **Комбинаторная геометрия**

строить регулярные покрытия плоскости равными фигурами (паркеты);  
использовать для замощения правильные многоугольники, выпуклые и невыпуклые фигуры.  
Обучающийся получит возможность научиться при решении олимпиадных задач самостоятельно:  
анализировать текст задачи, внетекстовую информацию;  
анализировать вопрос (требование) задачи;  
находить взаимосвязи между условиями задачи и использовать их для построения модели и хода решения;  
строить модели на основе уже известных (числовой луч, схема, таблица, диаграмма Эйлера — Венна, граф, дерево вариантов);  
составлять алгоритм решения задачи;  
находить «узкие места» задачи и использовать их при конструировании примеров;  
применять метод перебора;  
строить логические рассуждения в устной и письменной форме;  
описывать устно «путь к решению», то есть логическое рассуждение, которое позволило прийти к решению (конструкции, доказательству);  
преодолевать кажущиеся противоречия, связанные с недостаточным анализом условия задачи;  
проверять ответ (пример) на соответствие всем условиям задачи;  
проверять ход доказательства на отсутствие противоречий и необоснованных выводов;  
делать краткую (схематичную) запись решения задачи, логического рассуждения;  
формулировать в письменном виде полный текст логического рассуждения.

## **6 класс**

### **АРИФМЕТИКА**

#### **Суммы**

определять неизвестную, значение которой можно выразить двумя способами, и вычислять ее значения (применять метод подсчета двумя способами);  
использовать метод подсчета двумя способами в доказательствах «от противного», при решении задач с арифметическими таблицами, геометрических задач;  
составлять уравнения на основе подсчета неизвестной двумя способами;  
доказывать и применять при решении задач свойства среднего арифметического набора чисел (изменение при увеличении всех чисел набора на некоторое число и в некоторое число раз; оценка среднего арифметического сверху и снизу наибольшим и наименьшим числами набора;  
неизменность среднего арифметического при добавлении числа, равного среднему арифметическому чисел набора).

#### **Числа и их свойства**

строить конструкции с отрицательными числами;  
использовать отрицательные числа в задачах с числовыми оценками.

#### **Закономерности**

конструировать сложные арифметические, геометрические примеры с помощью метода последовательного конструирования;  
доказывать возможность существования конструкции методом последовательного конструирования;  
определять необходимое количество базовых конструкций в задачах с последовательным конструированием.

#### **Время и движение**

составлять схемы к задачам про движение по кругу, в том числе схем с единичными дугами;

решать задачи о количестве пересечений стрелок часов, их взаимном расположении; вычислять градусные меры дуг между часовой, минутной, секундной стрелками.

## **ГЕОМЕТРИЯ**

### **Геометрическое мышление**

изображать пространственные фигуры по набору свойств (количество вершин, ребер, граней); строить развертки более сложных многогранников, восстанавливать вид пространственной фигуры по ее развертке;

решать задачи об оклеивании объемных фигур, построении путей на поверхности таких фигур.

### **Площади**

строить разрезания клетчатых фигур на равные части;

использовать вспомогательную сетку для разрезания клетчатых фигур.

### **Геометрические неравенства**

применять неравенство треугольника при решении простых геометрических и текстовых задач;

доказывать неравенство треугольника с помощью построений циркулем и линейкой.

## **АЛГЕБРА**

### **От чисел к буквам**

применять запись числа в виде суммы разрядных слагаемых ( $a + 10b + 100c + \dots$ ) для сведения задачи к уравнению в цифрах;

решать уравнения в цифрах с помощью метода перебора и использования свойств делимости.

### **Функциональные зависимости**

использовать пропорции и их свойства при решении нестандартных текстовых задач.

### **Неравенства и оценки**

подбирать промежуточное число (посредника) для доказательства числовых неравенств, сравнения чисел;

использовать метод введения переменной для доказательства числовых неравенств, сравнения чисел.

## **ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ**

### **Делимость**

доказывать и применять в задачах признаки делимости, связанные с десятичной записью числа (на 7, 11, 13 и др.);

решать задачи на оценку и пример, связанные с делимостью (нахождение наименьшего числа с указанными свойствами делимости, наименьшей возможной суммой цифр).

### **Остатки**

записывать в общем виде целое число с определенным остатком от деления на  $n$ ;

использовать арифметические свойства остатков при решении задач;

применять свойство закикливания остатков при возведении числа в степень, определять остаток данной степени числа.

## **ЛОГИКА**

### **Математическая логика**

применять метод «от противного»;

строить отрицания высказываний с логическими связками «и», «или», сложных высказываний, применять эти отрицания в доказательствах «от противного»;

решать логические задачи на оценку и пример;

решать задачи о расположении объектов по кругу.

### **Принципы решения задач**

применять принцип Дирихле (избыток, недостаток) для решения задач;

использовать доказательство «от противного» для решения задач, требующих обобщения принципа Дирихле;

решать геометрические задачи с помощью принципа Дирихле.

### **Алгоритмы и конструкции**

составлять алгоритмы взвешиваний;

использовать представление результатов взвешиваний с помощью дерева вариантов;

доказывать невозможность построения алгоритма взвешиваний при недостаточном количестве доступных взвешиваний.

### **Игры и стратегии**

строить стратегии в играх «на опережение»;  
доказывать, что один из игроков может обеспечить себе ничью.

## **КОМБИНАТОРИКА И ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ**

### **Комбинаторика**

вычислять количество анаграмм данного слова с различными и повторяющимися буквами;  
выводить формулы для числа перестановок с помощью правила произведения.

### **Теория множеств**

использовать метод введения переменной в задачах про множества.

## **КОМБИНАТОРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ**

### **Раскраски и разбиения**

использовать различные виды раскрасок досок для доказательства невозможности разрезания доски на определенные части.

### **Теория графов**

формулировать условие задачи в терминах теории графов;  
применять лемму о рукопожатиях для подсчета количества ребер в графе;  
использовать свойство четности количества вершин нечетной степени в графе в доказательствах;  
доказывать лемму о хороводах.

### **Комбинаторная геометрия**

применять невыпуклые фигуры при конструировании;  
определять все возможные значения количества сторон при пересечении многоугольников.  
Обучающийся получит возможность научиться при решении олимпиадных задач самостоятельно:  
анализировать текст задачи, внетекстовую информацию;  
анализировать вопрос (требование) задачи;  
находить взаимосвязи между условиями задачи и использовать их для построения модели и хода решения;  
строить модели на основе уже известных (числовой луч, схема, таблица, диаграмма Эйлера — Венна, граф, дерево вариантов);  
составлять алгоритм решения задачи;  
строить отрицания сложных высказываний и использовать метод «от противного» для доказательства вспомогательных утверждений;  
находить «узкие места» задачи и использовать их при конструировании примеров;  
применять метод перебора;  
строить логические рассуждения в устной и письменной форме;  
формулировать и доказывать необходимые вспомогательные свойства (леммы);  
преодолевать кажущиеся противоречия, связанные с недостаточным анализом условия задачи;  
проверять ответ (пример) на соответствие всем условиям задачи;  
проверять ход доказательства на отсутствие противоречий и необоснованных выводов;  
фиксировать противоречия в ходе перебора случаев и делать выводы об их невозможности;  
формулировать в письменном виде полный текст решения задачи.

## **Практический этап. 7–9 классы**

### **7 класс**

## **АРИФМЕТИКА**

### **Суммы**

вычислять длинные суммы способом «телескопического суммирования»;  
использовать формулы сокращенного умножения, разложения многочленов на множители для вычисления сумм.

### **Числа и их свойства**

использовать свойства рациональных чисел при решении нестандартных задач;  
строить конструкции с рациональными числами.

### **Закономерности**

обобщать числовую задачу на задачу с переменной;  
составлять и доказывать формулы числовых закономерностей в арифметических, геометрических, логических и комбинаторных задачах.

### **Время и движение**

решать задачи на движение с помощью перехода в движущуюся систему координат;  
учитывать протяженность объектов в задачах на движение;

изображать схемы к нестандартным задачам на движение по реке и задачам, которые описывают схожий тип движения.

## **ГЕОМЕТРИЯ**

### **Геометрическое мышление**

решать задачи на построение с использованием соображений симметрии;

решать нестандартные задачи на нахождение ГМТ (геометрического места точек).

### **Площади**

доказывать и применять формулу площади произвольного треугольника;

вычислять площади нечетчатых фигур с помощью разрезания на элементарные части (прямоугольники и треугольники).

### **Геометрические неравенства**

использовать осевую симметрию при доказательстве геометрических неравенств;

решать задачу о нахождении кратчайшего пути между двумя точками, находящимися по одну сторону от заданной прямой и касающегося этой прямой.

### **Аналитические методы в геометрии**

доказывать теорему Пифагора с помощью метода дополнения и алгебраических интерпретаций;

применять теорему Пифагора при решении задач на разрезание.

## **АЛГЕБРА**

### **От чисел к буквам**

применять способы разложения многочленов на множители при решении нестандартных алгебраических задач;

использовать формулы сокращенного умножения для решения таких задач;

применять метод замены числовых значений переменными для упрощения числовых выражений.

### **Функциональные зависимости**

применять свойства линейной функции при решении нестандартных задач.

### **Неравенства и оценки**

доказывать арифметические свойства неравенств и применять их при решении задач;

доказывать неравенства с помощью выделения полных квадратов;

доказывать и применять неравенство Коши (о среднем арифметическом и среднем геометрическом для двух чисел);

использовать в доказательстве неравенств метод разбиения одночленов на слагаемые, прибавления и вычитания некоторого одночлена;

доказывать и применять неравенство о сумме квадратов трех чисел и их попарных произведениях.

## **ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ**

### **Делимость**

обосновывать корректность алгоритма Евклида и применять его при решении числовых задач, задач о делимости;

доказывать и применять свойства НОД и НОК;

доказывать теорему о линейном представлении НОД;

решать линейные уравнения в целых числах.

### **Остатки**

ограничивать множество возможных решений текстовых задач, уравнений в целых числах с помощью перебора по остаткам;

составлять таблицы возможных остатков квадратов, кубов чисел;

использовать свойства сравнений по модулю при решении задач;

решать сравнения с помощью сведения к линейным уравнениям в целых числах.

## **ЛОГИКА**

### **Математическая логика**

использовать дополнительную раскраску и разбиение на группы для решения логических задач на оценку и пример;

строить отрицание логического следования.

### **Принципы решения задач**

применять принцип «узких мест» для конструирования примеров и доказательства утверждений;

использовать идею упорядочивания числовых рядов по возрастанию/убыванию, рассмотрения наибольшего или наименьшего числа в ряду для конструирования примеров и доказательства утверждений;

применять геометрический принцип крайнего.

### **Алгоритмы и конструкции**

использовать «жадный» алгоритм для составления примеров, доказательства максимальности или минимальности;

применять «жадный» алгоритм при последовательном конструировании;

приводить примеры задач, в которых «жадный» алгоритм не дает оптимальный ответ.

### **Игры и стратегии**

конструировать стратегии в математических играх для двух игроков, основанные на предварительном разбиении ходов на пары;

разрабатывать стратегии в математических играх для двух игроков, основанные на создании «заповедников».

## **КОМБИНАТОРИКА И ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ**

### **Комбинаторика**

находить число способов размещения с повторениями и без повторений;

выводить формулу для числа размещений в виде произведения и в виде отношения факториалов;

находить число сочетаний;

выводить формулу для числа сочетаний;

различать ситуации, в которых нужно подсчитать число размещений и число сочетаний;

доказывать равенства для чисел сочетаний алгебраически и комбинаторно;

решать задачи на подсчет количества способов, связанные с числом размещений и сочетаний.

### **Теория множеств**

выводить и использовать формулу включений-исключений для трех множеств.

## **КОМБИНАТОРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ**

### **Раскраски и разбиения**

применять разбиение на группы объектов двух типов, расположенных по кругу;

использовать метод разбиения досок на непересекающиеся части для доказательства оценок;

решать задачи с помощью усреднения (с подсчетом общего числа разбиений).

### **Теория графов**

использовать свойства связности, понятие компонент связности графа при решении задач;

применять графы-деревья для решения задач;

использовать двудольные графы и их свойства для решения задач.

### **Комбинаторная геометрия**

доказывать свойства раскрасок плоскости;

решать задачи о существовании одноцветных и разноцветных точек на определенном расстоянии на плоскости;

строить правильные раскраски паркетов;

решать задачи о правильной раскраске объемных фигур. 25 Обучающийся получит возможность научиться при решении олимпиадных задач самостоятельно:

анализировать текст задачи, внетекстовую информацию;

анализировать вопрос (требование) задачи;

находить взаимосвязи между условиями задачи и использовать их для построения модели и хода решения;

строить модели на основе уже известных (график на координатной плоскости, схема, таблица, диаграмма Эйлера — Венна, граф, уравнение, неравенство);

выбирать общий подход к решению задачи;

при необходимости корректировать ход решения задачи в процессе ее решения;

конструировать собственный способ решения задачи;

применять общие принципы решения задач (анализ «узких мест», принцип крайнего, масштабирование задачи, индуктивные рассуждения);

формулировать и доказывать необходимые вспомогательные свойства (леммы);

проверять решение задачи на соответствие условиям и требованиям, непротиворечивость математическому и жизненному опыту;

излагать решение задачи в письменной и устной форме.

## **8 класс**

К концу обучения в восьмом классе обучающийся научится:

### **АРИФМЕТИКА**

#### **Суммы**

работать с рекуррентными соотношениями;

выделять и доказывать закономерности, связанные с рядом Фибоначчи;

доказывать свойства чисел Фибоначчи, связанные с суммированием.

#### **Числа и их свойства**

доказывать иррациональность чисел вида  $n$ , где  $n$  - натуральное число, не являющееся точным квадратом;

доказывать иррациональность чисел, являющихся суммой таких чисел;

использовать свойства сопряженных чисел при решении задач;

применять свойства рациональности и иррациональности суммы, разности, произведения и частного иррациональных чисел;

доказывать свойства периодических и непериодических десятичных дробей, связанные с конечностью и бесконечностью повторения цифр.

#### **Закономерности**

составлять формулы закономерностей;

доказывать алгебраические равенства и формулы закономерностей с помощью метода математической индукции;

применять метод математической индукции в случае, когда шаг индукции отличен от 1.

#### **Время и движение**

решать задачи на движение с помощью введения нескольких переменных и дальнейшего рационального решения получающейся линейной или нелинейной системы уравнений;

применять известные неравенства (неравенство Коши, неравенство Штурма) при решении сложных задач на движение.

### **ГЕОМЕТРИЯ**

#### **Геометрическое мышление**

применять дополнительные построения при решении геометрических задач (удвоение медианы, откладывание равного отрезка на продолжении стороны («спрямление»), построение середины отрезка, проведение высот, вспомогательной окружности).

#### **Площади**

вычислять площади фигур с помощью приема трансформации площадей;

доказывать равенство площадей фигур с помощью приема трансформации площадей.

#### **Геометрические неравенства**

доказывать и использовать при решении задач неравенство ломаной (обобщение неравенства треугольника);

доказывать и применять при решении задач теорему о монотонности периметра.

#### **Аналитические методы в геометрии**

применять метод координат для решения геометрических задач;

использовать векторы и их свойства в геометрических задачах на доказательство.

### **Практический этап. 7–9 классы**

#### **АЛГЕБРА**

##### **От чисел к буквам**

доказывать и применять при решении задач свойства многочленов с целыми коэффициентами;

использовать теорему Виета для решения нестандартных задач;

применять свойства квадратного трехчлена при решении задач.

##### **Функциональные зависимости**

применять геометрический смысл коэффициентов квадратного трехчлена, график квадратного трехчлена для решения задач;

исследовать относительное расположение графиков квадратных трехчленов с определенными свойствами;

находить максимальное/минимальное значение квадратичной функции;

использовать симметричность графика квадратичной функции относительно прямой, проходящей через вершину параболы.

##### **Неравенства и оценки**

доказывать и применять транзитивность для доказательства неравенств;

доказывать и применять неравенство Чебышева;

определять свойства неравенств, связанные с перестановками переменных (симметрические, циклические неравенства);

использовать метод упорядочивания переменных при доказательстве неравенств;

доказывать и использовать неравенство Коши — Буняковского — Шварца при доказательстве неравенств;

выводить и применять лемму Титу.

#### **ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ**

##### **Делимость**

использовать понятие степеней вхождения простых чисел для решения нелинейных уравнений в натуральных, целых, целых неотрицательных числах;

применять метод бесконечного спуска в доказательствах «от противного»;

использовать соображения делимости при решении нелинейных уравнений в целых числах.

##### **Остатки**

доказывать малую теорему Ферма с помощью рассмотрения остатков произведений при делении на  $p$  и с помощью метода математической индукции;

применять малую теорему Ферма для решения теоретико-числовых задач;

доказывать и применять в задачах теорему Вильсона.

#### **ЛОГИКА**

##### **Математическая логика**

применять принцип крайнего при решении логических задач;

строить логические формулы и использовать их для построения отрицаний сложных высказываний;

решать логические задачи со сложными высказываниями;

•• применять законы де Моргана;

строить таблицы истинности.

##### **Принципы решения задач**

фиксировать и доказывать наличие инварианта в процессе;

применять инвариант для доказательства общих утверждений о ходе процесса, для выяснения результата процесса;

находить и применять инварианты, связанные с делимостью и остатками;

применять инвариант при решении геометрических задач.

## **Алгоритмы и конструкции**

составлять алгоритмы, не зависящие от промежуточных результатов работы, и обосновывать их корректность;

применять кодировку числами других систем счисления при построении алгоритмов взвешиваний, угадывания, на клетчатых досках и для доказательства невозможности составления алгоритма с меньшим числом действий.

## **Игры и стратегии**

доказывать существование стратегии в математической игре для двух игроков без приведения самой стратегии.

## **КОМБИНАТОРИКА И ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ**

### **Комбинаторика**

применять метод «шаров и перегородок» при решении комбинаторных задач;

строить взаимно однозначные соответствия между комбинаторными задачами;

решать задачи о подсчете количества множеств и подмножеств с определенными свойствами.

### **Теория множеств**

выводить комбинаторным способом и использовать формулу включений-исключений для нескольких множеств.

## **Практический этап. 7–9 классы**

## **КОМБИНАТОРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ**

### **Раскраски и разбиения**

строить правильные реберные и вершинные раскраски,

доказывать возможность их построения для графа с

определенными свойствами.

### **Теория графов**

использовать метод выделения остовного дерева для решения задач теории графов;

применять метод «подвешивания» графа за вершину для доказательства утверждений теории графов;

использовать дополнительный граф, рассмотрение «антиребер» при решении задач;

применять графы в задачах теории чисел, комбинаторной геометрии.

### **Комбинаторная геометрия**

доказывать эквивалентность определений выпуклого многоугольника;

доказывать возможность триангуляции выпуклого многоугольника;

доказывать и применять лемму о диагонали;

выводить и применять формулы суммы градусных мер внутренних и внешних углов многоугольника;

использовать графы-деревья при решении задач о триангуляции многоугольников.

Обучающийся получит возможность научиться при решении олимпиадных задач самостоятельно:

анализировать текст задачи, внетекстовую информацию;

анализировать вопрос (требование) задачи;

находить взаимосвязи между условиями задачи и использовать их для построения модели и хода решения;

строить модели на основе уже известных (график на координатной плоскости, схема, таблица, диаграмма Эйлера — Венна, граф, уравнение, неравенство);

выбирать общий подход к решению задачи;

при необходимости корректировать ход решения задачи в процессе ее решения;

конструировать собственный способ решения задачи;

применять общие принципы решения задач (анализ «узких мест», принцип крайнего, масштабирование задачи, индуктивные рассуждения);

формулировать и доказывать необходимые вспомогательные свойства (леммы);

проверять решение задачи на соответствие условиям и требованиям, непротиворечивость математическому и жизненному опыту;

излагать решение задачи в письменной и устной форме.

## **Планируемые предметные результаты освоения курса**

### **9 класс**

К концу обучения в девятом классе обучающийся научится:

## **АРИФМЕТИКА**

### **Суммы**

применять свойства арифметической, геометрической прогрессии при решении задач;  
решать задачи с произвольными рекуррентными соотношениями.

### **Числа и их свойства**

применять свойства рациональности и иррациональности в алгебраических, геометрических задачах;  
доказывать невозможность построения правильных многоугольников с вершинами в узлах сетки.

### **Закономерности**

строить доказательства методом математической индукции с более сложными схемами;  
приводить примеры неверного применения метода математической индукции;  
применять метод математической индукции для решения геометрических, комбинаторных, комбинаторно-геометрических, теоретико-числовых задач.

### **Время и движение**

сводить текстовые задачи (на движение, совместную работу и т. д.) к линейным и нелинейным системам с несколькими переменными.

## **ГЕОМЕТРИЯ**

### **Геометрическое мышление**

доказывать свойства движений и применять их при решении задач (центральная, осевая, скользящая симметрия, поворот, параллельный перенос);  
доказывать свойства гомотетии, поворотной гомотетии и применять их при решении задач.

### **Площади**

доказывать методом математической индукции формулу Пика для вычисления площадей многоугольников с вершинами в узлах сетки;  
применять формулу Пика при решении задач.

### **Геометрические неравенства**

рассматривать различные случаи в геометрических задачах (в том числе при дополнительном построении).

### **Аналитические методы в геометрии**

применять теоремы синусов и косинусов в доказательствах.

## **АЛГЕБРА**

### **От чисел к буквам**

доказывать и применять теорему Безу для многочленов;  
использовать понятие асимптотики при решении задач;  
применять теорему Виета для многочленов  $n$  степени.

### **Функциональные зависимости**

решать задачи распознавания функций по их свойствам и значениям;  
выводить интерполяционный многочлен в форме Лагранжа;  
использовать интерполяцию при решении задач.

### **Неравенства и оценки**

доказывать и применять неравенство о средних для  $n$  чисел;  
применять метод Штурма для доказательства неравенств.

## **ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ**

### **Делимость**

вычислять функцию Эйлера для некоторых чисел;  
доказывать теорему Эйлера и применять ее при решении задач.

### **Остатки**

использовать понятие первообразного корня при решении задач;  
применять порядок (показатель) числа по модулю и его свойства при решении задач;  
доказывать малую теорему Ферма с помощью показателей;  
использовать классы вычетов при доказательстве утверждений.

## **ЛОГИКА**

### **Математическая логика**

решать логические задачи, связанные с теорией графов и другими областями математики.

### **Принципы решения задач**

фиксировать и доказывать наличие полуинварианта в процессе;  
применять инвариант для доказательства конечности процесса;  
применять инвариант при решении задач комбинаторной геометрии, теории графов, геометрических задач.

### **Алгоритмы и конструкции**

доказывать невозможность построения алгоритма при определенных условиях;  
оценивать сложность алгоритмов.

### **Игры и стратегии**

конструировать стратегии для игр на графах;  
использовать двоичную систему счисления в задачах теории игр.

## **КОМБИНАТОРИКА И ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ**

### **Комбинаторика**

применять бином Ньютона, треугольник Паскаля при решении задач.

### **Теория множеств**

доказывать формулу включений-исключений с помощью метода математической индукции;  
применять взаимно однозначное соответствие множеств для упрощения подсчета количества вариантов.

## **КОМБИНАТОРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ**

### **Раскраски и разбиения**

вычислять хроматическое число некоторых графов;  
доказывать планарность графов;  
доказывать и применять теорему Эйлера для связного плоского графа.

### **Теория графов**

доказывать и применять критерии существования эйлера пути и эйлера цикла в графе;  
решать задачи о поиске гамильтонова пути и цикла в графе;  
использовать ориентированный граф как модель;  
доказывать существование гамильтонова пути в полном ориентированном графе;  
приводить примеры графов без гамильтоновых циклов.

### **Комбинаторная геометрия**

использовать опорную прямую многоугольника при решении задач;  
доказывать существование выпуклой оболочки множеств;  
использовать выпуклую оболочку для решения задач и доказательства утверждений.  
Обучающийся получит возможность научиться при решении олимпиадных задач самостоятельно:  
анализировать текст задачи, внетекстовую информацию;  
анализировать вопрос (требование) задачи;  
находить взаимосвязи между условиями задачи и использовать их для построения модели и хода решения;  
строить модели на основе уже известных (график на координатной плоскости, схема, таблица, диаграмма Эйлера — Венна, граф, уравнение, неравенство);  
выбирать общий подход к решению задачи;  
при необходимости корректировать ход решения задачи в процессе ее решения;  
конструировать собственный способ решения задачи;  
применять общие принципы решения задач (анализ «узких мест», принцип крайнего, масштабирование задачи, индуктивные рассуждения);  
формулировать и доказывать необходимые вспомогательные свойства (леммы);  
проверять решение задачи на соответствие условиям и требованиям, непротиворечивость математическому и жизненному опыту;  
излагать решение задачи в письменной и устной форме

**5 класс, 1ч в неделю, всего 34 ч**

| № | Тема занятия      | Кол-во часов | Основные олимпиадные идеи                                                                                                                             |
|---|-------------------|--------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | Можно или нельзя? | 1            | Конструирование и доказательство как способы ответа на вопрос «Можно ли?»                                                                             |
| 2 | Анализ с конца    | 1            | Анализ «с конца» как альтернатива введению переменной при решении текстовых задач, использование метода «анализа с конца» в задачах на доказательство |
| 3 | Пентамино         | 1            | Принцип «узких мест» в геометрических задачах, соображения симметрии, метод перебора в задачах на разрезание и составление фигур                      |
| 4 | Логичный перебор  | 1            | Полный перебор в логических задачах, выбор удобного инструмента перебора, высказывания о всеобщности и существовании в логических задачах             |
| 5 | Игра 1            | 1            | Повторение тем занятий 1–4                                                                                                                            |
| 6 | Переверни и сложи | 1            | Метод разбиения чисел на пары, вычисление количества и суммы чисел в указанном диапазоне, эффект «плюс-минус один»                                    |
| 7 | Паркеты           | 1            | Конструирование в геометрических задачах, замощение плоскости равными фигурами, представления о невыпуклых фигурах                                    |

| №  | Тема занятия          | Кол-во часов | Основные олимпиадные идеи                                                                                                                                                                     |
|----|-----------------------|--------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 9  | От чисел—к буквам     | 1            | Введение переменной в текстовых задачах как метод нахождения всех решений, сравнение с методом перебора                                                                                       |
| 10 | Игра 2                | 1            | Повторение тем занятий 5–8                                                                                                                                                                    |
| 11 | Делимость и признаки  | 1            | Свойства и признаки делимости, задачи на оценку и пример                                                                                                                                      |
| 12 | Загадка Шахерезады    | 1            | Разложение на простые множители, задачи на доказательство, использующие разложение на простые множители                                                                                       |
| 13 | Необычные площади     | 1            | Перекраивание фигур для удобства вычисления площади на клетчатой бумаге                                                                                                                       |
| 14 | Отрезки на прямой     | 1            | Критерий расположения трех точек на прямой, конструирование в геометрических задачах                                                                                                          |
| 15 | Игра 3                | 1            | Повторение тем занятий 9–12                                                                                                                                                                   |
| 16 | Перекраивание фигур   | 1            | Решение задач на тему «разрежь и составь». Метод анализа «с конца» при решении задач на разрезание. Равносоставленные фигуры. Введение вспомогательной сетки при решении задач на разрезание. |
| 8  | Угадай, что я задумал | 1            | Составление алгоритмов угадывания, формирование представлений об оптимальном алгоритме                                                                                                        |

|    |                                |   |                                                                                                                             |
|----|--------------------------------|---|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 17 | Схема помогает!                | 1 | Нестандартные задачи на движение, использование вспомогательного чертежа при решении задач на движение                      |
| 18 | Сколько нужно взять?           | 1 | Оценка и пример в задачах о случайном выборе предметов                                                                      |
| 19 | Круги Эйлера. Метод дополнения | 1 | Дополнение подмножества, использование метода косвенного подсчета (дополнения) при решении комбинаторных задач              |
| 20 | Игра 4                         | 1 | Повторение тем занятий 13–16                                                                                                |
| 21 | Конструкции с дробями          | 1 | Конструкции в задачах с дробями, числовые ребусы с дробями, использование свойств и признаков делимости при конструировании |
| 22 | Числовые оценки                | 1 | Сведение задачи к неравенству, задачи на оценку и пример                                                                    |
| 23 | Признаки делимости и остатки   | 1 | Определение остатка числа при делении с помощью признака делимости, арифметика остатков                                     |
| 24 | Шахматная раскраска            | 1 | Шахматная раскраска досок, ее использование для оценок и доказательств. Обобщение шахматной раскраски на другие объекты     |
| 25 | Семь раз отмерь                | 1 | Предварительный анализ в задачах на разрезание, метод «малых случаев», метод «подсчета двумя способами»                     |

| №  | Тема занятия                        | Кол-во часов | Основные олимпиадные идеи                                                              |
|----|-------------------------------------|--------------|----------------------------------------------------------------------------------------|
| 26 | Игра 5                              | 1            | Повторение тем занятий 17–21                                                           |
| 27 | Правила суммы и произведения        | 1            | Дерево вариантов, комбинаторные правила суммы и произведения                           |
| 28 | Развертки куба. Виды объемных фигур | 1            | Различные развертки куба, три вида объемной фигуры и восстановление фигуры по ее видам |
| 29 | Соответствие                        | 1            | Метод взаимно-однозначного соответствия (разбиение на пары и группы)                   |
| 30 | Игры. Симметричная стратегия        | 1            | Симметричная стратегия в играх, доказательство стратегии                               |
| 31 | Увидеть граф                        | 1            | Граф как модель представления информации, графы шахматных фигур, двудольный граф       |
| 32 | Игра 6                              | 1            | Повторение тем занятий 22–26                                                           |
| 33 | Подведение итогов года              | 1            | Представление «любимых» задач по всем темам                                            |
| 34 | Повторение                          | 1            | Повторение                                                                             |

**6 класс 1 час в неделю, всего 34 часа**

| №  | Тема занятия                                  | Ко<br>л-<br>во<br>час<br>ов | Основные олимпиадные идеи                                                                            |
|----|-----------------------------------------------|-----------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1  | Метод «от<br>противного»                      | 1                           | Использование метода «от противного» при решении задач                                               |
| 2  | Десятичная<br>запись                          | 1                           | Использование представления в виде суммы разрядных<br>слагаемых с переменными                        |
| 3  | Отрицание<br>высказываний                     | 1                           | Отрицание высказываний с логическими связками                                                        |
| 4  | Игра 1                                        | 1                           | Повторение тем занятий 1-3                                                                           |
| 5  | Последовательн<br>ое<br>конструировани<br>е   | 1                           | Решение задач на конструирование путем рассмотрения более<br>простых задач. Метод «добавь по одному» |
| 6  | Среднее<br>арифметическое                     | 1                           | Использование среднего арифметического и его свойств при<br>решении задач                            |
| 7  | Игры на<br>опережение                         | 1                           | Развитие представления о стратегиях в математических играх на<br>примере игр на опережение           |
| 8  | Круги Эйлера.<br>Оценки                       | 1                           | Задачи с множествами. Введение переменной в задачах про<br>множества                                 |
| 9  | Игра 2                                        | 1                           | Повторение тем занятий 4-7                                                                           |
| 10 | Другие<br>признаки<br>делимости               | 1                           | Другие признаки делимости, связанные с десятичной записью<br>числа и их доказательство               |
| 11 | Шахматная<br>раскраска                        | 1                           | Использование шахматной раскраски досок для оценок и<br>доказательств                                |
| 12 | Принцип<br>Дирихле                            | 1                           | Формальное введение принципа Дирихле                                                                 |
| 13 | Пропорциональ<br>ность                        | 1                           | Использование пропорций при решении нестандартных<br>текстовых задач                                 |
| 14 | Игра 3                                        | 1                           | Повторение тем занятий 8-11                                                                          |
| 15 | Сравнение<br>чисел                            | 1                           | Транзитивность неравенств. Использование нескольких<br>посредников                                   |
| 16 | Движение по<br>кругу                          | 1                           | Использование чертежей при решении задач на движение по<br>кругу                                     |
| 17 | Оценка +<br>пример и<br>признаки<br>делимости | 1                           | Решение задач на оценку и пример, связанные с признаками<br>делимости                                |
| 18 | Подсчет двумя<br>способами                    | 1                           | Использование метода двойного подсчета в арифметических<br>задачах                                   |
| 19 | Игра 4                                        | 1                           | Повторение тем занятий 12-15                                                                         |
| 20 | Разложение на<br>простые<br>множители         | 1                           | Теорема о простом делителе.                                                                          |
| 21 | Взвешивания                                   | 1                           | Составление алгоритмов определения фальшивых монет с<br>помощью взвешивания                          |
| 22 | Перестановки с<br>повторениями и<br>без       | 1                           | Перестановки без повторений и повторениями на примере<br>анаграмм слов                               |
| 23 | Выигрышные                                    | 1                           | Выигрышные позиции как метод конструирования стратегии                                               |

|    |                                      |   |                                                                                           |
|----|--------------------------------------|---|-------------------------------------------------------------------------------------------|
|    | позиции                              |   |                                                                                           |
| 24 | Игра 5                               | 1 | Повторение тем занятий 16-19                                                              |
| 25 | Геометрический принцип Дирихле       | 1 | Использование принципа Дирихле в геометрических задачах                                   |
| 26 | Остатки и их свойства                | 1 | Остатки от деления целых чисел на натуральные                                             |
| 27 | Конструкции с отрицательными числами | 1 | Использование отрицательных чисел в конструкциях как метод устранения мнимых противоречий |
| 28 | Графы. Подсчет ребер                 | 1 | Интерпретация задач в терминах теории графов                                              |
| 29 | Игра 6                               | 1 | Повторение тем занятий 20-23                                                              |
| 30 | Развертки многогранников             | 1 | Изображение многогранников по заданному количеству вершин                                 |
| 31 | Неравенство треугольника             | 1 | Доказательство неравенства треугольника с использованием построений                       |
| 32 | Конструкции с невыпуклыми фигурами   | 1 | Невыпуклые фигуры как средство преодоления мнимых противоречий.                           |
| 33 | Подведение итогов года               | 1 | Представление «любимых» задач по всем темам                                               |
| 34 | Повторение                           | 1 | Повторение                                                                                |

**7 класс 1 час в неделю, всего 34 часа**

| №  | Тема занятия                   | Ко<br>л-<br>во<br>час<br>ов | Основные олимпиадные идеи                                                           |
|----|--------------------------------|-----------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| 1  | От закономерности – к формуле  | 1                           | Обобщение числовой задачи с переменным количеством элементов                        |
| 2  | Доказательство «от противного» | 1                           | Повторение                                                                          |
| 3  | Логика. Оценка и пример        | 1                           | Решение логических задач на оценку и пример                                         |
| 4  | Игра 1                         | 1                           | Повторение тем занятий 1-3                                                          |
| 5  | Формула площади треугольника   | 1                           | Вывод формулы площади произвольного треугольника с вершинами                        |
| 6  | Алгоритм Евклида               | 1                           | Алгоритм Евклида, свойства НОД и НОК                                                |
| 7  | Узкие места                    | 1                           | Принцип крайнего как инструмент конструирования примеров, доказательств утверждений |
| 8  | Мощность множеств              | 1                           | Формула включений-исключений для трех множеств                                      |
| 9  | Игра 2                         | 1                           | Повторение тем занятий 4-7                                                          |
| 10 | Сравнение по модулю            | 1                           | Перебор по остаткам                                                                 |

|    |                                                      |   |                                                                                                            |
|----|------------------------------------------------------|---|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 11 | Телескопическое суммирование                         | 1 | Суммы с переменными пределами                                                                              |
| 12 | Рациональные числа                                   | 1 | Определение рационального числа                                                                            |
| 13 | Раскраски                                            | 1 | Использование различных раскрасок в два и более цвета при решении задач на клетчатых досках и других задач |
| 14 | Игра 3                                               | 1 | Повторение тем занятий 8-11                                                                                |
| 15 | Неравенство треугольника и дополнительные построения | 1 | Использование дополнительных построений при доказательстве геометрических неравенств                       |
| 16 | Принцип крайнего и упорядочивание                    | 1 | Упорядочивание ряда чисел                                                                                  |
| 17 | Деревья                                              | 1 | Связанность графа, компоненты связности                                                                    |
| 18 | «Жадные алгоритмы»                                   | 1 | «Жадный алгоритм» как метод построения приема, доказательства минимальности или максимальности             |
| 19 | Игра 4                                               | 1 | Повторение тем занятий 12-15                                                                               |
| 20 | Размещения и сочетания                               | 1 | Размещения с повторениями и их использование при решении задач                                             |
| 21 | Раскраска плоскости и ее частей                      | 1 | Раскраски плоскостей с определенными свойствами. Раскраска объемных фигур                                  |
| 22 | Стратегия разбиения на пары                          | 1 | Развитие представлений о стратегиях в математических играх                                                 |
| 23 | Линейные диофантовы уравнения                        | 1 | Теорема о линейном представлении НОД                                                                       |
| 24 | Игра 5                                               | 1 | Повторение тем занятий 16-19                                                                               |
| 25 | Формулы сокращенного умножения                       | 1 | Использование формул сокращенного умножения при вычислении сумм                                            |
| 26 | Задачи на построение                                 | 1 | Решение нестандартных задач на построение, нахождение ГМТ                                                  |
| 27 | Относительное движение                               | 1 | Переход в систему координат, связанную с одним объектом                                                    |
| 28 | Неравенство Коши                                     | 1 | Доказательство неравенств                                                                                  |
| 29 | Игра 6                                               | 1 | Повторение тем занятий 20-23                                                                               |
| 30 | Линейная функция                                     | 1 | График линейной функции                                                                                    |
| 31 | Двудольные графы                                     | 1 | Двудольные графы. Критерий двудольности                                                                    |
| 32 | Подведение итогов года                               | 1 | Представление «любимых» задач по всем темам                                                                |
| 33 | Повторение                                           | 2 | Повторение                                                                                                 |

**8 класс 1 час в неделю, всего 34 часа**

| №  | Тема занятия                          | Ко<br>л-<br>во<br>час<br>ов | Основные олимпиадные идеи                                           |
|----|---------------------------------------|-----------------------------|---------------------------------------------------------------------|
| 1  | Повторение                            | 1                           | Задачи на повторение, алгоритм решения задач                        |
| 2  | Логические формулы                    | 1                           | Логические задачи                                                   |
| 3  | Числа Фибоначчи                       | 1                           | Задачи с последовательностью Фибоначчи                              |
| 4  | Слишком много переменных              | 1                           | Задачи на движение; использование неравенства Коши                  |
| 5  | Линейная функция                      | 1                           | Задачи о свойствах линейной функции и ее графике                    |
| 6  | Решение задач                         | 1                           | Задачи по темам 1-5                                                 |
| 7  | Инвариант                             | 1                           | Задачи нахождения инварианта в процессе                             |
| 8  | Симметрия и дополнительные построения | 1                           | Задачи на дополнительные построения в геометрических задачах        |
| 9  | Метод математической индукции         | 1                           | Формальное введение математической индукции                         |
| 10 | Принцип крайнего в логических задачах | 1                           | Логические задачи на оценку и пример                                |
| 11 | Решение задач                         | 1                           | Задачи по темам 6-9                                                 |
| 12 | Иррациональные числа                  | 1                           | Задачи на изучение иррациональных чисел                             |
| 13 | Существование стратегии               | 1                           | Игры с более сложными стратегиями                                   |
| 14 | Нелинейные уравнения в целых числах   | 1                           | Использование теоретико-числовых знаний                             |
| 15 | Разбиения                             | 1                           | Задачи с использованием раскрасок                                   |
| 16 | Решение задач                         | 1                           | Задачи 10-13                                                        |
| 17 | Квадратный трехчлен. Алгебра          | 1                           | Задачи на исследование алгебраических свойств квадратного трехчлена |
| 18 | Неравенство ломаной и «резинки»       | 1                           | Задачи на неравенства ломаной                                       |
| 19 | Алгоритмы «по плану»                  | 1                           | Задачи на составление алгоритмов                                    |
| 20 | Квадратный трехчлен. Геометрия        | 1                           | Задачи на исследование геометрических свойств квадратного трехчлена |
| 21 | Многочлены и их свойства              | 1                           | Свойства многочленов с целыми коэффициентами                        |
| 22 | Решение задач                         | 2                           | Задачи 14-18                                                        |
| 23 | Метод                                 | 1                           | Примеры применения метода математической индукции                   |

|    |                                         |   |                                                   |
|----|-----------------------------------------|---|---------------------------------------------------|
|    | математической индукции                 |   |                                                   |
| 24 | Эйлеровы и гамильтовы пути              | 1 | Задачи об эйлеровых и гамильтовых путях в графах  |
| 25 | Вычеты                                  | 1 | Теоретико-числовые задачи на окружности           |
| 26 | Формула Пика                            | 1 | Задачи, приводящие к формуле Пика                 |
| 27 | Решение задач                           | 2 | Задачи 19-22                                      |
| 28 | Неравенства о средних. Транснеравенство | 1 | Задачи на неравенство о средних, транснеравенство |
| 29 | Число сочетаний                         | 1 | Задачи о свойствах биномиальных коэффициентов     |
| 30 | Число сочетаний. Шары и перегородки     | 1 | Комбинированные комбинаторные задачи              |
| 31 | Формула включений-исключений            | 1 | Формула включений-исключений для 2,3,4 множеств   |
| 32 | Подведение итогов года                  | 1 | Представление «любимых» задач по всем темам       |

**9 класс 1 час в неделю, всего 34 часа**

| № | Тема занятия                           | Ко<br>л-<br>во<br>час<br>ов | Основные олимпиадные идеи                                   |
|---|----------------------------------------|-----------------------------|-------------------------------------------------------------|
| 1 | Повторение                             | 1                           | Задачи на повторение, алгоритм решения задач                |
| 2 | Задачи, сводящиеся к системе уравнений | 1                           | Текстовые задачи с решением линейных и нелинейных уравнений |
| 3 | Треугольник Паскаля                    | 1                           | Задачи по треугольнику Паскаля                              |
| 4 | Графы и логика                         | 1                           | Логические задачи                                           |
| 5 | Полуинвариант                          | 1                           | Задачи о процессах                                          |
| 6 | Решение задач                          | 2                           | Задачи по темам 2-5                                         |
| 7 | Индукция в неалгебраических задачах    | 1                           | Задачи на ММИ                                               |
| 8 | Движение плоскости                     | 1                           | Теорема Шаля                                                |

|    |                                               |   |                                                                                                      |
|----|-----------------------------------------------|---|------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 9  | Распознавание функций                         | 1 | Задачи на восстановление функций по значениям                                                        |
| 10 | Геометрический метод доказательств неравенств | 1 | Доказательства алгебраических неравенств с помощью перехода к соответствующим геометрическим задачам |
| 11 | Решение задач                                 | 1 | Задачи по темам 6-9                                                                                  |
| 12 | Эйлеровы пути и циклы                         | 1 | Задачи на использование критериев существования эйлера пути                                          |
| 13 | Игры и двоичная система                       | 1 | Игра Ним                                                                                             |
| 14 | Гомотетия                                     | 1 | Применение гомотетии при решении задач                                                               |
| 15 | Функция и теорема Эйлера                      | 1 | Задачи на применение функции Эйлера и ее свойств                                                     |
| 16 | Решение задач                                 | 2 | Задачи 10-13                                                                                         |
| 17 | Прогрессия                                    | 1 | Задачи на последовательности                                                                         |
| 18 | Формула Пика                                  | 1 | Доказательство формулы Пика                                                                          |
| 19 | Приложения иррациональных чисел               | 1 | Алгебраические и геометрические задачи с иррациональностями                                          |
| 20 | Гамильтоновы пути и циклы                     | 1 | Задачи на использование критериев существования гамильтонова пути и цикла в графе                    |
| 21 | Вычеты и показатели                           | 1 | Классы вычетов.                                                                                      |
| 22 | Решение задач                                 | 2 | Задачи 14-18                                                                                         |
| 23 | Неравенство о средних для нескольких чисел    | 1 | Доказательство неравенства о средних для нескольких чисел и использованием ММИ                       |
| 24 | Хроматическое число графа                     | 1 | Задачи с использованием понятия хроматического числа графа                                           |
| 25 | Теорема Безу                                  | 1 | Задачи с использованием теоремы Безу                                                                 |
| 26 | Неравенства. Метод Штурма                     | 1 | Использование метода Штурма для доказательств неравенства                                            |
| 27 | Решение задач                                 | 2 | Задачи 19-22                                                                                         |
| 28 | Бином Ньютона                                 | 1 | Задачи с использованием бинома Ньютона                                                               |
| 29 | Выпуклая оболочка                             | 1 | Задачи на использование опорной прямой многоугольника                                                |
| 30 | Подведение итогов года                        | 1 | Представление «любимых» задач по всем темам                                                          |

## **УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА**

### **Учебные материалы для обучающихся**

1. Петерсон Л.Г., Агаханова О.Н., А.С. Рускин Математический театр. III ступень. 3-9 классы. Учебное пособие для подготовки к математическим олимпиадам

### **Методические материалы для учителя**

1. Математические олимпиады. 5-6 классы: учебно-методическое пособие для учителей математики общеобразовательных школ/ А.В. Фарков. – М.: Издательство «Экзамен», 2022
2. Севрюков П. Ф. Подготовка к решению олимпиадных задач по математике. М. Илекса
3. Спивак В.А. Тысяча и одна задача по математике: Кн. для учащихся 5 – 7 кл. – М.: Просвещение
4. Горбачев Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике. – М.: МЦНМО

### **Цифровые образовательные ресурсы и ресурсы сети интернет**

1. РЭШ <https://resh.edu.ru/>
2. Федеральная государственная информационная система Минпросвещения России «Моя школа» <https://myschool.edu.ru>
3. ИСДП Петерсон <https://peterson.institute/catalogs/materials/>
4. Федеральный информационный портал «Российское образование» <https://edu.ru>
5. Российская онлайн-платформа «Учи.ру» <https://uchi.ru>
6. Образовательная платформа «Сферум» <https://sferum.ru>

## Литература

1. Рабочая концепция одаренности: Федеральная целевая программа «Одаренные дети»/Под ред. Д.Б.Богоявленской, В.Д.Шадрикова.—М.:Министерство образования РФ, 2003. ([http://narfu.ru/school/deti\\_koncher.pdf](http://narfu.ru/school/deti_koncher.pdf))
2. Петерсон Л.Г. Система и структура учебной деятельности в контексте современной методологии. Монография/Л.Г.Петерсон, Ю.В.Агапов, М.А.Кубышева и др. — М.:Институт СДП, 2018.
3. Петерсон Л.Г. Деятельностный метод обучения: построение непрерывной сферы образования/Л. Г.Петерсон, М.А.Кубышева и др. — М.: АПК и ППРО; УМЦ «Школа 2000...», 2007.
4. Анисимов О.С. Методологический словарь для стратегов. Т.1/О.С.Анисимов.— М.:Энциклопедия управленческих знаний, 2004.
5. Анисимов О.С. Гегель: мышление и развитие (путь к культуре мышления). — М.: Агро-Вестник, АМБ-агро, 2000.
6. Венгер Л.А. Педагогика способностей.—М.:Знание,1973.
7. Маслоу А. Мотивация и личность.—СПб.:Питер, 2006.
8. Хинчина А.Я. О воспитательном эффекте уроков математики// Математика в школе. — 1962. — № 3. — С. 30–40.
9. Гнеденко Б.В. Развитие мышления и речи при изучении математики // Математика в школе. — 1991. — № 4. — С. 3–9.
10. Гингулис Э.Ж. Развитие математических способностей учащихся // Математика в школе. — 1990. — № 1. — С. 14–17.
11. Агаханов Н.Х. Средовой подход как условие развития математически одаренных школьников/Н.Х.Агаханов//Вестник ТГПУ.—2013.—№1(129).—С.120–124.
12. Мелик-Пашаева А.А. Проявление одаренности как норма развития //Психологическая наука и образование.—2014.—Т.19.—№4.—С.15–21.
13. Петерсон Л.Г., Абатурова В.В., Кубышева М.А. Система «выращивания» одаренности школьников: методологический аспект и практика // Профильная школа. — 2016.— № 2. — С. 6–22.
14. Петерсон Л.Г., Кубышева М.А. Как научить учиться: техно-логия деятельностного метода в системе непрерывного образования (детский сад—школа—вуз)//Педагогическое образование и наука. — 2014. — № 2. — С. 52–58.
15. Петерсон Л.Г., Агаханова О.Н. Математический театр: учебное пособие по олимпиадной математике для 3 класса (ступень I). — М.: Институт СДП, 2021.
16. [https://www.sch2000.ru/lessons/math\\_theatre/](https://www.sch2000.ru/lessons/math_theatre/).